Alcuni Teoremi del Valor medio.

① Siano $\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ differenziabile

e siano $a, b \in A$ t.c. $[a, b] \subseteq A$.

Allora, $\exists z \in [a, b]$:

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(z), b - a \rangle.$$

dim. Sia $\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{[0,1]}} \xrightarrow{\gamma} A$ $\quad \gamma(t) = (1-t)a + tb$, $\quad \dot\gamma(t) = b - a$

e sia $\varphi(t) = f(\gamma(t)) : [0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

è derivabile con $\dot\varphi(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle$
$= \langle \nabla f(\gamma(t)), b - a \rangle$

Per T. di Lagrange,

$\exists t_0 \in [0, 1]$:

$\dot\varphi(t_0) = \dot\varphi(t_0)(1 - 0) = \varphi(1) - \varphi(0) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) =$
$= f(b) - f(a)$

Ma $\dot\varphi(t_0) = \langle \nabla f(z), b - a \rangle$ con $z = \gamma(t_0) \in [a, b]$ ∎

② Siano $\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ differenziabile

e siano $a, b \in A$ t.c. $[a, b] \subseteq A$.

~~Allora~~ Sia inoltre $v \in \mathbb{R}^n$.

Allora $\exists z \in [a, b]$:

$$\langle F(b) - F(a), v \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle JF(z)(b - a), v \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

dim. Pongo $f(x) = \langle F(x), v \rangle$, che soddisfa le ipotesi di ①. Ottengo che $\exists z \in [a, b]$:

$\langle F(b) - F(a), v \rangle = f(b) - f(a) = \langle \nabla f(z), b - a \rangle$

$= \cancel{\langle JF(z), v \rangle \ldots, b - a \rangle_{\mathbb{R}^n}}$

$= \cancel{(b-a)^t JF(z) v}$

D'altra parte $\partial_j f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{l=1}^m F_l(x) v_l\right)$

$= \sum_{l=1}^m \partial_{x_j} F_l(x) v_l = [v^t JF(x)]_j$;

quindi $\langle F(b) - F(a), v \rangle = v^t JF(z)(b - a)$

$$\underbrace{\boxed{v^t}}_{m} \; \overset{n}{\boxed{JF(x)}}_{m} \; \overset{1}{\boxed{b-a}}_{n} = \langle JF(z)(b - a), v \rangle \; ∎$$

③ Siano $\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ differenziabile

e siano $a, b \in A$ t.c. $[a, b] \subseteq A$.

Allora

$$\|F(b) - F(a)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|b - a\| \cdot \sup_{z \in [a, b]} \|JF(z)\|.$$

dim. $\|F(b) - F(a)\| = \langle F(b) - F(a), v \rangle$ $\quad \exists v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$

$= \langle JF(z)(b - a), v \rangle$ $\quad \exists z \in [a, b]$

$\leq \|JF(z) \cdot (b - a)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|JF(z)\| \cdot \|b - a\|$

∎

Teorema della mappa inversa locale e sue conseguenze.

Se $\mathbb{R} \supseteq \underset{\text{intervallo}}{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è continua, allora f è una biezione tra I e $f(I)$ $\iff$ f è strettamente crescente o decrescente. La situazione in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, è più complessa.

Abbiamo comunque un utile teorema che riguarda l'invertibilità locale.

Teorema della mappa inversa.

$\underset{\text{ap.}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n$; $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$

$a \in A$ e $\det(JF(a)) \neq 0$; $F(a) = b$.

Allora $\exists\, \underset{\substack{\text{aperto} \\ \text{in } \mathbb{R}^n \\ U \subseteq A}}{U \ni a}$ e $\exists\, \underset{\substack{\text{aperto} \\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{V \ni b}$

t.c. (i) F è iniettiva su U e $F(U) = V$

(ii) Se $V \xrightarrow{F^{-1}} U$ allora $F^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ e $J(F^{-1})(F(x)) = JF(x)^{-1}$

Dim. (i) Iniettività.

Sia $\lambda > 0$ piccolo: $2\lambda \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{2}$

Sia $A = JF(a)$

Sia $\delta > 0$: $\|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|JF(x) - A\| \leq \lambda$

Pongo $U = B(a, \delta) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$
(restringendo δ se necessario).

Fisso $y \in \mathbb{R}^n$ e pongo

$$U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$$

$\varphi(x) = x + A^{-1}(y - f(x))$;

$\varphi(x) = x \iff y = f(x)$

Ho che $\|J\varphi(x)\| = \|I - A^{-1} JF(x)\|$

$= \|A^{-1}(A - JF(x))\| \leq$

$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - JF(x)\|$

$\leq \|A^{-1}\| \cdot \lambda = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ φ è una contrazione

$\Rightarrow$ ha al più un punto fisso

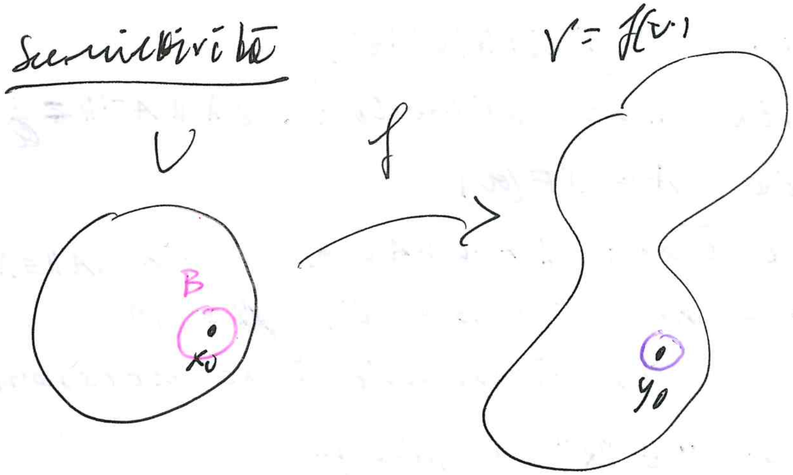
$\Rightarrow$ f è iniettiva.

~~(ii) Suriettività~~

$V := F(U)$ OSS. che

$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$

Suriettività



$V = f(U)$ Sia $y_0 \in V$: $y_0 = f(x_0)$

Sia $B = B(x_0, r)$: $\overline{B(x_0,r)} \subseteq U$.

Mostro che $B(y_0, \lambda r) \subseteq V$.

Se $|y - y_0| < \lambda r$ allora

$$\|\varphi(x_0) - x_0\| = \|x_0 + A^{-1}(y - f(x_0)) - x_0\|$$
$$= \|A^{-1}(y - y_0)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \lambda r$$
$$= r/2 \quad \text{Quindi..}$$

$x \in \overline{B(x_0, r)} \Rightarrow$

$$\|\varphi(x) - x_0\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| + \|\varphi(x_0) - x_0\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{r}{2} \leq r$$

Quindi $\varphi(x) \in B$.

cioè, $\overline{B} \xrightarrow{\varphi} \overline{B}$

e quindi il punto fisso di φ esiste e sta in $\overline{B}$.

cioè $y = f(x) \in f(\overline{B}) \subseteq f(U) = V$.

~~Ciò~~ Per dimostrare la parte (ii) abbiamo bisogno di dotarci di alcuni strumenti utili anche ad altri scopi.

(A) Lemma 1 Consideriamo su $\mathbb{R}^{n \times n}$ la metrica $d(A,B) = \|A - B\|$, dove $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|x\| = 1\} =$
$= \max\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|x\| = 1\}$.

Allora, $(\mathbb{R}^{n \times n}, d)$ è completo.

dim. Si basa su un sub-Lemma:

Lemma 2 Sia $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Allora $\|A\| \leq \|A\|_{HS} := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right\}^{1/2}$

e $\|A\|_{HS} \leq \sqrt{\min(m,n)} \cdot \|A\|$

dim. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ e $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$. Se $\|v\| = 1$,

Allora $\|Av\|^2 = \|(\alpha_1 \cdot v, \alpha_2 \cdot v, \ldots, \alpha_m \cdot v)\|^2 =$
$= \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j \cdot v)^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \|\alpha_j\|^2 \|v\|^2 = \|A\|_{HS}^2$

Nell'altra dimensione, sia $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Allora $A e_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

quindi $\|A\|_{HS}^2 = \sum_{j=1}^n \|A e_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^n \|A\|^2 \cdot 1$

$= n \|A\|^2$

Allo stesso modo, se $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ è la base canonica di $\mathbb{R}^m$, allora $\varepsilon_i^t A = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

e $\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i=1}^m \|\varepsilon_i^t A\|^2 = \sum_{i=1}^m \|A^t \varepsilon_i\|^2$

$\leq \|A^t\|^2 \cdot m = \|A\|^2 \cdot m$

poichè $\|A^t\| = \|A\|$ → vedi nota sotto

Quindi $\|A\|_{HS}^2 \leq n \cdot \|A\|^2, m \cdot \|A\|^2$ c.v.d.

~~Nota. Sia $v \in \mathbb{R}^n$: $\|A\| = \|Av\|$ e $\|v\|=1$.~~
~~Sia $w \in \mathbb{R}^m$ con $\|w\|=1$. Allora~~

Nota Siano $v \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^m$; ~~$\|v\| = \|w\| = 1$.~~

Allora $\langle A^t w, v \rangle = \langle w, Av \rangle \leq \|Av\| \leq \|A\|$

Quindi (ponendo $v = \frac{A^t w}{\|A^t w\|}$)

$\|A^t w\| \leq \|A\|$, dunque $\|A^t\| \leq \|A\|$

Allo stesso modo $\|A\| \leq \|A^t\|$.

Dal Lemma 2 segue che $(\mathbb{R}^{n \times n}, d)$ ha le stesse successioni di Cauchy di $(\mathbb{R}^{n \times n}, d_{HS})$, dove

$d_{HS}(A, B) = \|A - B\|_{HS}$.

Poichè $(\mathbb{R}^{n \times n}, d_{HS})$ è completo (è uno spazio vettoriale con norma euclidea di dimensione $n \times n = n^2$), lo è anche $(\mathbb{R}^{n \times n}, d)$: il Lemma è mostrato ∎

(B) <u>Teorema</u> (serie di von Neumann).

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $\|A\| < 1$.

Allora (i) $B := \sum_{m=0}^{\infty} A^m = I + A + A^2 + \dots$

converge in $(\mathbb{R}^{n \times n}, d)$

(ii) $B(I - A) = (I - A)B = I$.

cioè $B = (I - A)^{-1}$.

<u>dim.</u> Sia $S_N = \sum_{m=0}^{N} A^m = I + A + \dots + A^N \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Allora $\|S_{N+M} - S_N\| = \left\| \sum_{m=N+1}^{N+M} A^m \right\|$

$= \left\| A^{N+1} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} A^m \right\| \leq \|A\|^{N+1} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \|A\|^m$

$= \|A\|^{N+1} \frac{1 - \|A\|^M}{1 - \|A\|} < \frac{\|A\|^{N+1}}{1 - \|A\|} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$,

cioè $\{S_N\}_{N \geq 0}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}^{n \times n}, d)$

quindi $\exists B := \lim_{N \to \infty} S_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

che indica $B = \sum_{m=0}^{\infty} A^m$. (i) è fatto.

Per mostrare (ii)

$$S_\nu(I-A) = \sum_{m=0}^{\nu} A^m - \sum_{m=1}^{\nu+1} A^m = I - A^{\nu+1}$$

$\downarrow_{\nu\to\infty}$ $B(I-A)$; $\downarrow_{\nu\to\infty}$ I

poiché $\|A^{\nu+1}\| \le \|A\|^{\nu+1} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

dunque $B\cdot(I-A) = I$. ∎

(C) Corollari Sia $\Omega = \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} : \exists A^{-1}\}$.

(i) Se $A\in\Omega$ e $\|B-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, allora $B\in\Omega$

(ii) Ω è aperto in $(\mathbb{R}^{n\times n}; d)$.

dim. (i) $B = B - A + A = A[(A^{-1}B - I) + I]$

è invertibile se $(A^{-1}B - I) + I$ è invertibile (perché A lo è)

se $\|A^{-1}B - I\| = \|A^{-1}(B-A)\| < 1$ per la disuguaglianza di v.n.

se $\|B-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, poiché

in tal caso $\|A^{-1}(B-A)\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|B-A\| < 1$.

(ii) Se $A\in\Omega$, per (i) $B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subseteq \Omega$,

quindi Ω è aperto ∎

Torniamo alla dimostrazione di (ii) nel Teorema della mappa inversa.

Passo 1. Siano $U \xrightarrow{F} V = F(U)$;

$y = F(x) \in V$; $y + k = F(x+h) \in V$ come in (i),

e $\varphi(z) = z + A^{-1}(y - F(z))$ come in (i).

Allora $\frac{\|h\|}{2} \ge \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| =$

$= \|[x + h + A^{-1}(y - F(x+h))] - [x + A^{-1}(y - F(x))]\|$

$= \|h - A^{-1}[F(x+h) - F(x)]\| = \|h - A^{-1}k\|$

$\ge \|h\| - \|A^{-1}k\|$

quindi

$\|A^{-1}\|\|k\| \ge \|A^{-1}k\| \ge \frac{\|h\|}{2}$: $\|k\| \ge \frac{1}{2\|A^{-1}\|}\cdot\|h\| = \lambda\cdot\|h\|$

Passo 2 Poiché $A\in\Omega$ (cioè $\exists A^{-1}$) e

$\|JF(x) - A\| \le \lambda = \frac{1}{2\|A^{-1}\|} < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$,

per (C)(i) abbiamo che $\exists\, JF(x)^{-1}$.

Inoltre $x \longmapsto JF(x) = B \longmapsto B^{-1}$

continua perché $F\in C^1$

continua perché le operazioni per passare da B a B^{-1} sono continue

(ma vedi sotto per una dimostrazione migliore).

<u>Passo 3</u>. $V \xrightarrow{F^{-1}} U$ è differenziabile.

$$F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y) = (x+h) - x = h$$
$$\Downarrow$$
$$JF(x)\cdot\left[F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y)\right] = JF(x)h =$$
$$= F(x+h) - F(x) + \varepsilon_1(h) \quad \text{dove } \frac{\|\varepsilon_1(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
poiché F è differenziabile

$= k + \varepsilon_1(h)$ con $h = F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y)$

$\Downarrow$ + uso passo 2

$$F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y) - [JF(x)]^{-1}k = [JF(x)]^{-1}\cdot\varepsilon_1(h).$$

Devo mostrare che quest'ultima quantità è $\underset{k\to 0}{o}(\|k\|)$.

$$\frac{\|[JF(x)]^{-1}\varepsilon_1(h)\|}{\|k\|} \leq \|[JF(x)]^{-1}\|\cdot\frac{\|\varepsilon_1(h)\|}{\|k\|}$$
$$\leq \|[JF(x)]^{-1}\|\cdot\frac{\|\varepsilon_1(h)\|}{\|h\|}\cdot\frac{1}{\lambda} \quad (\underline{\text{Passo 1}})$$

Poiché $\|h\| \leq \frac{1}{\lambda}\cdot\|k\|$ (ancora <u>Passo 1</u>),

fissato $\varepsilon > 0$; sia $\bar{\delta} > 0$:

$\|h\| \leq \bar{\delta} \Rightarrow \frac{\|\varepsilon_1(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon$ (poiché $\varepsilon_1(h) = o(\|h\|)$ tale $\bar{\delta}>0$ esiste)

quindi $\|k\| \leq \lambda\bar{\delta}$

$\Downarrow$

$\|h\| \leq \bar{\delta} \Rightarrow \frac{\|\varepsilon_1(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon.$

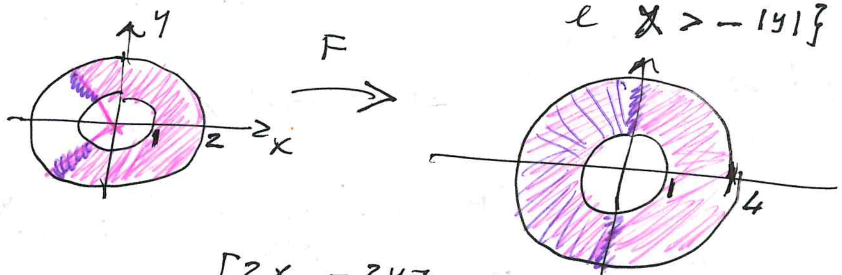
Cioè: $F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y) - [JF(x)]^{-1}k = \underset{k\to 0}{o}(k)$

dunque F^{-1} è differenziabile in $y = F(x)$ e $J(F^{-1})(F(x)) = [JF(x)]^{-1}$ come volevamo ∎

<u>Esempio</u>. Contrariamente al caso $n=1$; per $n\geq 2$ possiamo avere che $\exists\, JF(x)^{-1}$ $\forall x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ (un insieme connesso), ma F non è invertibile (globalmente).

P.es. $\mathbb{R}^2 \supseteq E \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$ $\quad E = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 < 4$ e $x > -|y|\}$



$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} : \det(JF(x,y)) = 4(x^2+y^2) > 0 \quad (x,y)\in E$$

quindi $\exists [JF(x,y)]^{-1}$ $\forall (x,y) \in E$: F è loc. invertibile.

Ma ~~$F(\sqrt{2},0) = (2,0) = F$~~

$F(0,\sqrt{2}) = (-2,0) = F(0,-\sqrt{2})$ e $(0,\pm\sqrt{2}) \in E$.

<u>Oss.</u> La F è ispirata a $\mathbb{C} \supseteq E \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

$z \longmapsto z^2$

$x+iy \longmapsto (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$

Esercizio. Mostrare che non esistono funzioni $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $G \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ con $m < n$ tali che $G \circ F(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio. Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

(1) Mostrare che $JF(x,y)$ è invertibile $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Trovare $E \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e massimale con la proprietà che $E \xrightarrow{F} F(E)$ è biunivoca

~~(3) Mostrare che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto~~

Esercizio. Sia $\mathbb{R}^n \underset{\text{aperto}}{\supseteq} E \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$; $JF(x)$ invertibile $\forall x \in E$. Mostrare che se $A \subseteq E$ è aperto, allora $F(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto.

Esercizio. Sia $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$

$$F(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$$

Mostrare che $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ esiste $r > 0$ e t.c.

$$F^{-1}(B((a,b), r)) = V_1 \cup V_2$$

con $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ aperti, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$; e

$V_1 \xrightarrow{F} B((a,b), r)$

$V_2 \xrightarrow{F} B((a,b), r)$

sono biunivoche.

~~Diffeomorfismi~~. DIFFEOMORFISMI.

Def. Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti.
Un diffeomorfismo tra U e V è una mappa biunivoca $U \xrightarrow{F} V \in C^1$ con $JF(x)$ invertibile $\forall x \in U$. Se esistono tali mappe, U e V sono detti diffeomorfi.

U $\xrightarrow{F}$ V

Teorema La relazione $U \underset{d}{\cong} V \iff U$ è diffeomorfo a V è di equivalenza.

Dim. $U \underset{d}{\cong} U$ perché $U \xrightarrow{I} U$ è un diffeomorfismo.

$U \underset{d}{\cong} V \Rightarrow V \underset{d}{\cong} U$ per il teorema della mappa inversa.
Se $U \xrightarrow{F} V$ è un diffeomorfismo, allora $V \xrightarrow{F^{-1}} U$ è un diffeomorfismo.

Se $U \underset{d}{\cong} V$ e $V \underset{d}{\cong} W$, allora $\exists\ U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W$ diffeomorfismi, ma in tal caso $U \xrightarrow{G \circ F} W$ è un diffeomorfismo, quindi $U \underset{d}{\cong} W$. $\blacksquare$

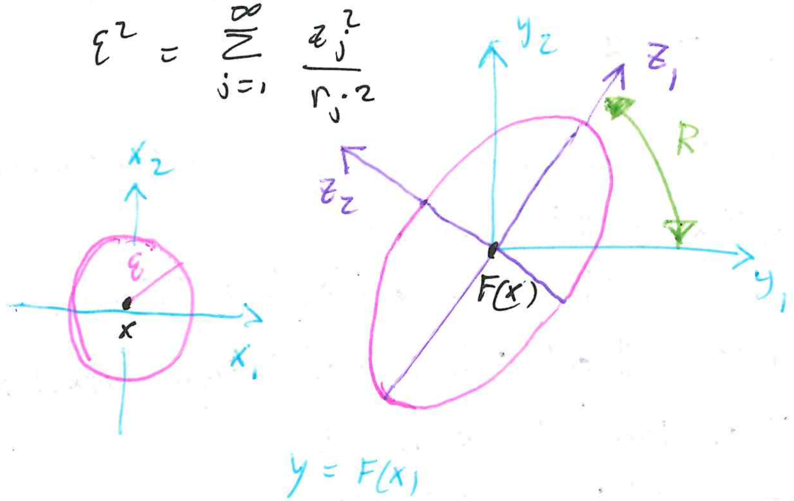
Oss. Consideriamo il differenziale
$$dF(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$h \longmapsto dF(x)(h) = JF(x)h.$$
Allora $\|dF(x)(h)\|^2 = \langle JF(x)h, JF(x)h \rangle$
$= \langle JF(x)^t JF(x)h, h \rangle =$
$= h^t [JF(x)^t JF(x)] h = Q_{D(x)}(h) = Q(h)$
con $D(x) = JF(x)^t JF(x) \geq 0$
Se $\exists\ JF(x)^{-1}$, allora $D(x) > 0$:
$h \neq 0 \Rightarrow JF(x)h \neq 0 \Rightarrow Q_{D(x)}(h) > 0$.
Siano $\|h\| = \varepsilon$ e $k = JF(x)h$.
$\varepsilon^2 = \|h\|^2 = \|JF(x)^{-1}k\|^2 = k^t (JF(x)^{-1})^t JF(x) k$
$= k^t D(x)^{-1} k = k^t R^t \Delta R k$ con
$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ e $\lambda_i > 0$ per $i = 1 \dots n$, $R \in SO(n)$

Cioè: $\varepsilon^2 = z^t \Delta z$ $\quad (z = R k)$

$$\boxed{\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j^2}$$ Equazione di un ellissoide

con semiassi $\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda_j}} = \varepsilon \cdot r_j > 0$

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j^2}{r_j^2}$$



Cioè: F mappa <u>sfere infinitesime</u> (di raggio ε) in <u>ellissoidi infinitesimi</u>.

Se $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, allora

$1 \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ misura la massima distorsione infinitesima di f.